

Elektrotechnik – 5.

Elektromagnetische Induktion

Luft- und Raumfahrttechnik Bachelor, 1. Semester

David Straub

5. Elektromagnetische Induktion

1. Induktionsgesetz
2. Selbstinduktion
3. Energie des magnetischen Feldes
4. Kräfte an Grenzflächen

Grundprinzip

- Bisher: elektrisches Feld ruhender Ladungen (Elektrostatik) und magnetisches Feld konstanter Ströme (Magnetostatik)
- Sobald zeitliche Änderungen auftreten → Wechselwirkung zwischen elektrischen und magnetischen Feldern

Induktion: ein zeitlich veränderliches Magnetfeld erzeugt („induziert“) ein elektrisches Feld

Induktion: technische Anwendungen

- Generatoren (Energieerzeugung)
- Transformatoren (Spannungswandlung)
- Elektromotoren, Rekuperation bei E-Fahrzeugen
- Induktive Ladesysteme (Smartphones, E-Autos)
- Sensoren (z.B. induktive Näherungsschalter)
- Induktionsherd
- Wirbelstrombremsen

Bewegung eines Leiterstücks im Magnetfeld

Lorentzkraft: $\vec{F}_m = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$

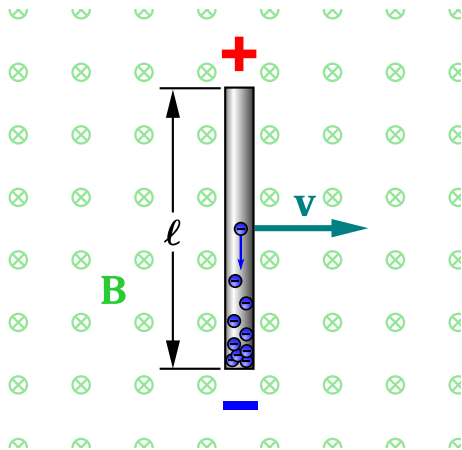
Kraft durch elektrische Feldstärke: $\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$

Kräftegleichgewicht: $\vec{F}_e + \vec{F}_m = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$

Spannung an den Leiterenden: mit $U = \vec{E} \cdot \vec{\ell}$ folgt:

$$U_{\text{ind}} = -(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{\ell}$$

Induzierte Spannung durch Bewegung im Magnetfeld



Das Induktionsgesetz in allgemeiner Form

Bewegtes Leiterstück ($\vec{v}$, $\vec{B}$, $\vec{\ell}$ senkrecht zueinander):

$$U_{\text{ind}} = -B \cdot \ell \cdot v = -B \cdot \frac{dA}{dt}$$

Allgemein gilt:

$$U = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Übergang auf N Windungen:

$$U = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

Zwei Möglichkeiten der Induktion

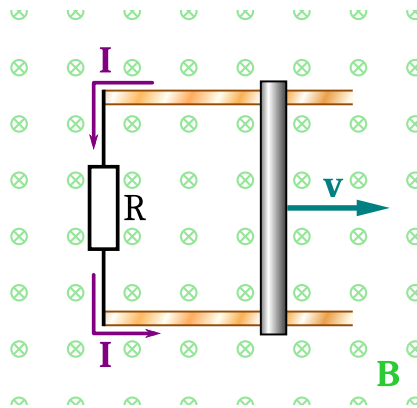
1. **Bewegungsinduktion:** Leiter und Magnetfeld bewegen sich relativ zueinander
2. **Ruheinduktion:** Magnetischer Fluss ändert sich bei ruhendem Leiter

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(A \cdot B)}{dt} = -\frac{dB}{dt} \cdot A - \frac{dA}{dt} \cdot B$$

Induzierter Strom

Verbindet man die Enden des Leiterstücks über einen Widerstand R (der sich nicht mitbewegt), so fließt ein **induzierter Strom**:

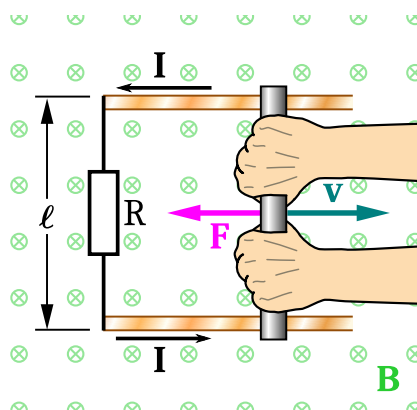
$$I = \frac{U}{R} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$



Die Lenz'sche Regel

Die induzierte Spannung ist stets so gerichtet, dass ein durch sie hervorgerufener Strom **der Ursache seiner Entstehung entgegenwirkt**.

Erklärung: die Energie, die am Widerstand in Wärme umgesetzt wird, stammt aus der mechanischen Arbeit, die aufgewendet werden muss, um die Flussänderung zu erzeugen – die Lenz'sche Regel ist Ausdruck der **Energieerhaltung**.



Das induzierte elektrische Wirbelfeld

Wichtige Erkenntnis: Bei Induktion ist die Spannung U_{ind} **keine Potentialdifferenz!**

- Das zeitlich veränderliche Magnetfeld erzeugt ein elektrisches **Wirbelfeld**
- Dieses Feld ist **nicht konservativ** – es existiert kein Potential

$$U_{\text{ind}} = \oint \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{s} \neq 0$$

Ein Umlaufintegral entlang der Leiterschleife – über einen **geschlossenen** Weg!

Vergleich: Elektrostatik vs. Induktion

Elektrostatik: wirbelfrei, konservativ, Potential existiert:

$$\oint \vec{E}_{\text{stat}} \cdot d\vec{s} = 0$$

Elektromagnetische Induktion: das induzierte Feld ist nicht wirbelfrei:

$$\oint \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Dies ist das **Faraday'sche Induktionsgesetz**.

Die fundamentalen Integralgleichungen der Elektrodynamik

Größe	Elektro-/Magnetostatik	Elektrodynamik
$\vec{D}$	$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$	$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$
$\vec{E}$	$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$	$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi}{dt}$ (Induktionsgesetz)
$\vec{B}$	$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$	$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$
$\vec{H}$	$\oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s} = I$	(hier nicht behandelt)

Fazit: Zeitlich veränderliche Felder koppeln elektrische und magnetische Phänomene!

Beispiel: Bewegte Leiterschleife im Magnetfeld

Rechteckige Leiterschleife bewegt sich mit $\vec{v}$ durch ein homogenes, räumlich begrenztes Magnetfeld:

- **Eintreten:** zunehmender Fluss $\rightarrow U_{\text{ind}} \neq 0$
- **Vollständig im Feld:** konstanter Fluss $\rightarrow$ keine Induktion!
- **Austreten:** abnehmender Fluss $\rightarrow U_{\text{ind}} \neq 0$ (umgekehrtes Vorzeichen)

Klausur-Klassiker: Verläufe $\Phi(t)$ und $u(t)$ qualitativ skizzieren – $u(t)$ ist die (negative) *Steigung* von $\Phi(t)$!



Jetzt sind Sie dran: Induktion (zu zweit)

Aufgabe 14 (= Klausuraufgabe SoSe 2019, Aufgabe 1.2!)

Im Luftspalt eines Ferritkerns (Querschnitt $A_1 = 4 \text{ cm}^2$) sitzt eine bewegliche Messspule ($N_2 = 10$ Windungen, Fläche $A_2 = 1 \text{ cm}^2$). Das Feld erzeugt eine feste Spule mit $N_1 = 2000$ Windungen; $R_{m, \text{ges}} = 10^7 \text{ H}^{-1}$. Ab $t = 0$ wird die Messspule mit konstanter Geschwindigkeit herausgezogen; nach $0,1 \text{ s}$ ist sie vollständig draußen.

- Skizzieren Sie qualitativ $\Phi_2(t)$ durch die Messspule und die induzierte Spannung $u(t)$.
- Welcher Fluss Φ_2 durchsetzt die Spule anfangs, damit $U_{\text{ind}} = 10 \text{ mV}$ beträgt?
- Welche Flussdichte B herrscht dann im Luftspalt, und welcher Gesamtfluss Φ_1 durchsetzt die feste Spule (A_1)?
- Welcher Strom I muss durch die feste Spule fließen?

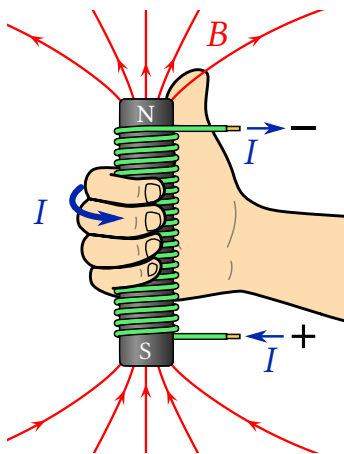
Von der Induktion zur Selbstinduktion

Bisher: Externes Magnetfeld induziert Spannung: $U_{\text{ind}} = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$

Jetzt: Stromfluss durch Spule $\rightarrow$ eigenes Magnetfeld $\Phi \propto I$

Bei Stromänderung ändert sich auch $\Phi \rightarrow$ Induktion **in derselben Spule!**

Selbstinduktion: Die Spule induziert eine Spannung in sich selbst.



Herleitung der Selbstinduktivität

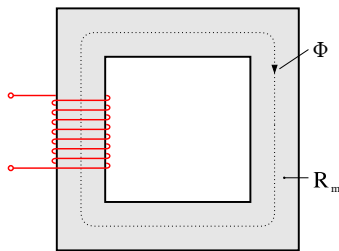
Ohmsches Gesetz des magnetischen Kreises:

$$\Phi = \frac{\Theta}{R_m} = \frac{N \cdot I}{R_m}$$

Mit $U_{\text{ind}} = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$ folgt:

$$U_{\text{ind}} = -\frac{N^2}{R_m} \cdot \frac{dI}{dt} = -L \cdot \frac{dI}{dt}$$

Proportionalitätskonstante L : **Induktivität** (Selbstinduktivität)



Vorzeichen: Klemmenspannung vs. induzierte Spannung

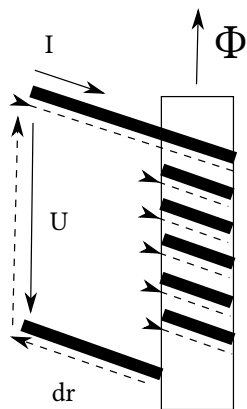
- **Induzierte Spannung** $U_{\text{ind}} = \oint \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi}{dt}$ (Umlaufintegral des Wirbelfelds)
- **Klemmenspannung** U : messbare Spannung zwischen den Anschlüssen

Das Ringintegral wird entgegen der Pfeilrichtung der Klemmenspannung durchlaufen $\rightarrow$

Vorzeichenwechsel!

Vorzeichenkonvention (Verbraucherzählpfeilsystem):

$$U = -U_{\text{ind}} = +L \cdot \frac{dI}{dt}$$



Induktivität (*inductance*) einer Spule

$$L = \frac{N^2}{R_m} = N^2 \cdot \frac{\mu_0 \mu_r A}{\ell_E}$$

Einheit: $[L] = \frac{\text{Wb}}{\text{A}} = \text{H (Henry)}$

Zusammenhang zwischen Strom und Klemmenspannung:

$$U = L \cdot \frac{dI}{dt}$$

Merkregel: L verbindet den magnetischen Kreis (R_m) mit der Schaltung – **eine** Zahl fasst Geometrie, Material und Windungszahl zusammen.

Induktivität bei ferromagnetischen Materialien

$$L = \frac{N^2}{R_m} = N^2 \cdot \frac{\mu_0 \mu_r A}{\ell_E}$$

- μ_r ist abhängig von I (Hysterese, Sättigung!) $\rightarrow L$ ist nicht konstant
- Effekt wird reduziert durch eine Spule mit **Luftspalt**:

$$L = N^2 \cdot \frac{\mu_0 A}{\frac{\ell_E}{\mu_r} + \delta} \approx N^2 \cdot \frac{\mu_0 A}{\delta}$$

$\rightarrow \mu_r$ hat kaum Einfluss auf L bei kleinem Luftspalt δ

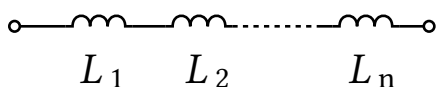
Klausurfrage (WiSe 2018/19): „Warum wird L auch für $\delta \rightarrow 0$ nicht beliebig groß?“ $\rightarrow$ weil der Eisenweg mit endlichem μ_r bleibt (und das Eisen sättigt).

Reihenschaltung von Induktivitäten

$$L_{\text{ges}} = L_1 + L_2 + \dots + L_n = \sum_i L_i$$

Die induzierten Spannungen addieren sich, der Strom ist überall gleich.

Intuition: Spulen verhalten sich wie eine einzige große Spule.



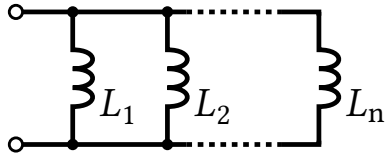
Parallelschaltung von Induktivitäten

$$\frac{1}{L_{\text{ges}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}$$

Die Spannung ist überall gleich, die Ströme teilen sich auf.

Herleitung wie bei der Parallelschaltung von Widerständen: $\frac{U}{L_{\text{ges}}} = \frac{dI_{\text{ges}}}{dt} = \sum_i \frac{dI_i}{dt} = \sum_i \frac{U}{L_i}$

Gleiche Regeln wie bei Widerständen (und *umgekehrt* zu Kondensatoren!)



Jetzt sind Sie dran: Drosselspule (zu zweit)

Aufgabe 15 (= Palme B4, Aufgabe 2 – die komplette Kette!)

Eine Drosselspule besteht aus einem Ringkern ($\mu_r = 4000$, $\ell_{Fe} = 20 \text{ cm}$, $A = 4 \text{ cm}^2$) mit Luftspalt $\ell_L = 0,5 \text{ mm}$. Wicklung: $N = 50$, $I = 2 \text{ A}$.

- Berechnen Sie $R_{m, Fe}$ und $R_{m, L}$. Wer dominiert?
- Wie groß ist der magnetische Fluss Φ ?
- Wie groß sind B (überall gleich!) sowie H im Eisen und im Luftspalt?
- Wie groß ist die Induktivität L der Spule?

Energiebilanz einer RL-Schaltung

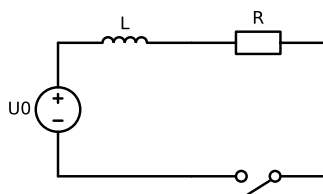
Maschengleichung:

$$U_0 = U_R + U_L = I \cdot R + L \cdot \frac{dI}{dt}$$

Energie: $dW = U_0 \cdot I \cdot dt = \underbrace{I^2 R dt}_{\text{Wärme}} + \underbrace{L I dI}_{\text{Magnetfeld}}$

Gespeicherte Energie in einer Induktivität:

$$W_m = \int_0^I L I' dI' = \frac{1}{2} L I^2$$



Energiedichte des Magnetfeldes

Falls L nicht bekannt oder nicht konstant ist:

$$W_m = \frac{1}{2} HB \cdot V = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu_r} \cdot V$$

Energiedichte (Energie pro Volumen):

$$w_m = \frac{1}{2} HB$$

Vergleiche Kondensator: $W = \frac{1}{2} CU^2$, $w_e = \frac{1}{2} ED$ – die Struktur ist identisch!

Kräfte an Grenzflächen: Herleitung

Eisenjoch mit Luftspalt (Fläche A): Vergrößert man den Spalt um $d\ell$, entsteht neues Feldvolumen $A \cdot d\ell$ mit Energiedichte $\frac{B^2}{2\mu_0}$:

$$dW = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot A \cdot d\ell$$

Mit $dW = F \cdot d\ell$ folgt die Kraft am einzelnen Luftspalt:

$$F = \frac{B^2 A}{2\mu_0}$$

Damit ist die Formel aus Kapitel 4 (Elektromagnet!) hergeleitet. ✓

Maxwell'sche Zugspannung

Mechanische Spannung (Kraft pro Fläche) an der Grenzfläche:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Anwendungen:

- Hubmagnete (Kräne, Bestückungsautomaten)
- Elektromagnetische Relais und Schütze
- Magnetische Verriegelungen

Zahlengefühl: bei $B = 1 \text{ T}$ ist $\sigma \approx 40 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$ – 1 cm^2 trägt 4 kg !



Jetzt sind Sie dran: Induktivität & Schalten (zu zweit)

Aufgabe 16 (Fortsetzung des Bestückungsautomaten aus Kapitel 4)

Der Elektromagnet hat $N = 1000$ Windungen und $R_{m, \text{ges}} = 10^6 \text{ H}^{-1}$; Betriebsstrom $I = 0,4 \text{ A}$.

- Welche Induktivität L hat die Spule?
- Beim Einschalten steigt der Strom konstant mit $0,5 \frac{\text{A}}{\text{ms}}$. Welche Spannung liegt dabei an der Induktivität?
- Welche Energie ist im Magnetfeld gespeichert, wenn der Betriebsstrom erreicht ist?
- An der Spule wird ein rechteckförmiger Spannungsverlauf angelegt ($+U_1$ für t_1 , dann 0). Skizzieren Sie den Stromverlauf $i(t)$!

Unsere Basiseinheiten-Tabelle wächst

Elektrische Größe	Formelzeichen	Einheit	Basiseinheiten
Ladung	Q	C	$\text{A} \cdot \text{s}$
Spannung	U	V	$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A} \cdot \text{s}^3}$
Kapazität	C	F	$\frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}^4}{\text{kg} \cdot \text{m}^2}$
Widerstand	R	Ω	$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A}^2 \cdot \text{s}^3}$
Magn. Flussdichte	B	T	$\frac{\text{kg}}{\text{A} \cdot \text{s}^2}$
Induktivität	L	H	$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A}^2 \cdot \text{s}^2}$

Herleitung an der Tafel: $[L] = \frac{[U] \cdot [t]}{[I]}$ – **damit ist die Klausur-Tabelle komplett!**

Zusammenfassung: Elektromagnetische Induktion

- Induktionsgesetz: $U = -N \frac{d\Phi}{dt}$ – Bewegungs- und Ruheinduktion
- Lenz: induzierter Strom wirkt seiner Ursache entgegen (Energieerhaltung)
- $u(t)$ -Skizzen: u ist die (negative) **Steigung** von $\Phi(t)$
- Selbstinduktion: $L = \frac{N^2}{R_m}$; $U = L \frac{dI}{dt}$; Reihe/parallel wie Widerstände
- Energie: $W_m = \frac{1}{2} LI^2$; Energiedichte $w_m = \frac{1}{2} HB$
- Kraft am Luftspalt: $F = \frac{B^2 A}{2\mu_0}$ (jetzt hergeleitet!)

Nächstes Kapitel: Wechselstrom – die komplexe Rechnung, das wichtigste Werkzeug des Semesters ⚡